# PART4 合成関数

## 要点整理と公式

### 要点① 合成関数

$y$ が $x$ の関数であり，$z$ が $y$ の関数であるとき，すなわち，2 つの関数

$y=f(x)$，$z=g(y)$

があるとき，$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれていれば，$z$ は $x$ の関数となる。
このことを確認する。

たとえば，$f(x)=x^2-2$，$g(x)=x+1$ のとき，$y=f(x)$，$z=g(y)$ とすると，
$f(x)$ の値域は $y\geqq -2$，$g(y)$ の定義域は実数全体である。

$x=a$ のとき

$y=f(a)=a^2-2$ より

$z=g(y)=g(a^2-2)=(a^2-2)+1=a^2-1$

となり，$x=a$ のとき $z=a^2-1$ である。

ある $x$ の値に対して

$y=f(x)=x^2-2$ より

$z=g(y)=g(\qquad)=g(x^2-2)=(x^2-2)+1=x^2-1$

となり，$z=x^2-1$ である。
この式において，$x=a$ のとき $z=a^2-1$ である。

このように，$g(y)$ に $y=f(x)$ を代入して得られる関数

$z=g(f(x))$

を $f(x)$ と $g(y)$ の「　　　　」といい，　　$(x)$ と表す。

(ex) $f(x)=x+2$，$g(x)=-2x+5$ のとき

$(g\circ f)(x)=\ \ (\ \ (x))=-2(x+2)+5=-2x+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(-2x+5)+2=-2x+7$

一般に，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ の結果は一致しない。

**[MEMO]**

**4** 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2+3$

(2) $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$

(3) $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$

## Point Pickup

**合成関数**

$(g\circ f)(x)=\ \ (\ \ (x))$

$y=f(x)$ の値域が $z=g(y)$ の定義域に含まれているかを確認

一般に，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ の結果は一致しない。

# 第 1 講　PART4 確認問題

**1**　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

$f(x)=3x+1$，$g(x)=x^2-2$

$(g\circ f)(x)=$ ［ア］$x^2+$［イ］$x-$［ウ］

$(f\circ g)(x)=$ ［エ］$x^2-$［オ］

**2**　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

$f(x)=\log_5 x$，$g(x)=5^x$

$(g\circ f)(x)=$ ［カ］

$(f\circ g)(x)=$ ［キ］

①　$1$　　②　$x$

③　$5^x$　　④　$\log_5 x$

**3**　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

$f(x)=x^2$，$g(x)=\cos x$

$(g\circ f)(x)=$ ［ク］

$(f\circ g)(x)=$ ［ケ］

①　$\sin x^2$　　②　$\cos x^2$

③　$\sin^2 x$　　④　$\cos^2 x$

# PART4 合成関数

**4** 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2+3$

(2) $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$

(3) $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$

**[解答]**

(1) $f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)と同じであるから

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x-1)^2+3=4x^2-4x+4$$

$g(x)$ の値域は 3 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれるから

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2+3)-1=2x^2+5$$

(2) $f(x)$ の値域は 0 より大きい実数全体で，$g(x)$ の定義域 $(x>0)$ と同じであるから

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_2 2^x=x$$

$g(x)$ の値域は実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)と同じであるから

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2^{\log_2 x}=x$$

$g(x)$ の定義域は $x>0$ であるから　$(f\circ g)(x)=x \quad (x>0)$

(3) $f(x)$ の値域は $-1$ 以上 1 以下の実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)に含まれるから

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x$$

$g(x)$ の値域は 0 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれるから

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sin x^2$$

# 第 1 講　PART4 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：9，イ：6，ウ：1，エ：3，オ：5

**[解説]**

$f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)と同じである。[A]

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \quad \text{[B]}$$
$$=(3x+1)^2-2$$
$$=\mathbf{9x^2+6x-1}$$

$g(x)$ の値域は $-2$ 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれる。

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad \text{[C]}$$
$$=3(x^2-2)+1$$
$$=\mathbf{3x^2-5}$$

[A]　$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているかを確認する。

[B]　$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

[C]　$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

**2**　**[正解]** カ：②，キ：②

**[解説]**

$f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)と同じである。

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=5^{\log_5 x}$$
$$=\boldsymbol{x} \quad (x>0) \quad \text{[D]}$$

$g(x)$ の値域は正の実数全体で，$f(x)$ の定義域($x>0$) と同じである。

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\log_5 5^x$$
$$=\boldsymbol{x} \quad \text{[E]}$$

[D]　$a^{\log_a x}=x$

[E]　$\log_a a^x=x$

**3**

**[正解] ク：②，ケ：④**

**[解説]**

$f(x)$ の値域は 0 以上の実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)に含まれる。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= \boldsymbol{\cos x^2} \quad \text{[F]}$$

[F]　$\cos x$ の $x$ の部分に $(f(x)=)x^2$ を代入する。

$g(x)$ の値域は $-1$ 以上 1 以下の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれる。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (\cos x)^2$$

$$= \boldsymbol{\cos^2 x}$$